CH 8 Identité de Bézout

EX 25 :

1. $363 \wedge 484 = 121$ (Algorithme d'Euclide)

   On a $363 \wedge 484 = 121$ et $484 - 363 = 121$ Donc $(363,484) \in S$

2. $n \wedge n+1 = 1 = n+1-n$ Donc $(n ; n+1) \in S$

3.

   a/ ($\Rightarrow$)

   s'il existe $k \in IN^*$ / $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$ $x < y$ Alors

   $x \wedge y = k(y-x) \wedge (k+1)(y-x) = |y-x| \, (k \wedge k+1) = (y-x).1 = y-x$ Donc $(x,y) \in S$

   ($\Leftarrow$) si $(x;y) \in S$ Alors $x < y$ et $x \wedge y = y-x \Rightarrow (y-x) \mid x$ et $(y-x) \mid y$

   $\Rightarrow x = k(y-x)$ et $y = k'(y-x)$

   $\Rightarrow y-x = (k'-k)(y-x) \Rightarrow k'-k = 1 \Rightarrow k' = k+1$

   Donc $x = k.(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$

   Cl : $\boxed{(x;y) \in S \text{ ssi il existe } k \in IN^* / x = k(y-x) \text{ et } y = (k+1)(y-x) \quad x < y}$

   b/ $(x;y) \in S$ donc il existe $k \in IN^*$ / $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$

   Donc $x \vee y = \dfrac{x.y}{x \wedge y} = \dfrac{k(y-x).(k+1)(y-x)}{y-x} = k(k+1)(y-x)$

4. a/ $D_{228} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 ; 19 ; 38 ; 57 ; 76 ; 114 ; 228\}$

   b/ $(x;y) \in S$ et $x \vee y = 228 \Rightarrow 228 = k.(k+1)(y-x)$ Donc k ; $k+1$ et $y-x$ sont des diviseurs de 228

   Donc les valeurs possibles de k sont 1 ; 2 ou 3

   $k=1 \Rightarrow y-x = 114 \Rightarrow x = k.(y-x) = 114$ et $y = (k+1)(y-x) = 228$

   $k=2 \Rightarrow y-x = 38 \Rightarrow x = 2 \times 38 = 76$ et $y = 3 \times 38 = 114$

   $k=3 \Rightarrow y-x = 19 \Rightarrow x = 3 \times 19 = 57$ et $y = 4 \times 19 = 76$

   Conclusion : L'ensemble des couples (x,y) de S tel que $x \vee y = 228$ est $\{(114,128) ; (76,114) ; (57,76)\}$

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn